A gamma-eloszlás

Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, λ-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, ekkor a $\gamma = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ valószínűségi változót (n, λ)**-paraméterű gamma-eloszlású**nak nevezzük.

Állítjuk, hogy *a γ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye*

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \text{ ha } x > 0$$

és $f_n(x) = 0$ egyébként, továbbá várható értéke $\frac{n}{\lambda}$, és szórásnégyzete $\frac{n}{\lambda^2}$.

Valóban, $n = 1$ esetén $f_1(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $x > 0$-ra, ez az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye. Alkalmazzunk indukciót. A konvolúció sűrűségfüggvényéről tudjuk, hogy $h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-x)g(x)dx$. Innen, ha $z > x$,

$$f_{n+1}(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda(z-x)} \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} dx =$$

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda z}}{(n-1)!} \int_0^z x^{n-1} dx = \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda z}}{(n-1)!} \left[\frac{1}{n} x^n \right]_0^z$$

$= \frac{\lambda^{n+1} z^n e^{-\lambda z}}{n!}$, az állítást a sűrűségfüggvényről beláttuk.

A várható értékre, ami nyilván azonnal adódna mint a várható értékek összege, parciális integrálással

$$E\gamma = \int_0^\infty \frac{\lambda^n x^n e^{-\lambda x}}{(n-1)!} dx = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x} dx =$$

$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!} \left[\frac{-1}{\lambda} x^n e^{-\lambda x} \right]_0^\infty - n \frac{1}{-\lambda} \int_0^\infty f_n(x) dx = \frac{n}{\lambda}.$$

A szórásnégyzetre $D^2\gamma = D^2\xi_1 + \cdots + D^2\xi_n = \frac{n}{\lambda^2}$. Az állítást a várható értékről és a szórásnégyzetről is beláttuk.

Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó (r, λ)**-paraméterű** (általánosított) **gamma-eloszlású** ($r > 0, \lambda > 0$), ha sűrűségfüggvénye

$$f_r(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)} \text{ ha } x > 0$$

és $f_r(x) = 0$ egyébként. Várható értéke $\frac{r}{\lambda}$, és szórásnégyzete $\frac{r}{\lambda^2}$. Megjegyezzük, hogy az $r = \frac{n}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ paraméterű gamma-eloszlás nem más, mint az n-szabadságfokú χ^2-eloszlás.

A λ-paraméterű exponenciális eloszlás generátorfüggvénye $M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$. Következésképp:

Az (n, λ)-paraméterű gamma-eloszlás generátorfüggvénye $M_\xi(t) = \frac{\lambda^n}{(\lambda - t)^n}$.

Az (r, λ)-paraméterek esetén a generátorfüggvény $M_\xi(t) = \frac{\lambda^r}{(\lambda - t)^r}$. Mivel az $r = \frac{n}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ paraméterű gamma-eloszlás nem más, mint az n-szabadságfokú χ^2-eloszlás:

Az n-szabadságfokú χ^2-eloszlás generátorfüggvénye $M_{\chi^2}(t) = \frac{1}{(1-2t)^{n/2}}$.

Ha egy adott időtartam alatt egy esemény bekövetkezte Poisson-eloszlást követ, akkor a 0 időponttól az esemény n-edik bekövetkeztéig eltelt időtartam gamma-eloszlást követ, vagyis bizonyos értelemben a gamma-eloszlású valószínűségi változót tekinthetjük a várakozási idő változójának.