Az F-eloszlás

Legyenek $\chi^2_{n_1}$, $\chi^2_{n_2}$ n_1 illetve n_2-szabadságfokú független χ^2-eloszlású valószínűségi változók. Az $\eta = \frac{n_2\chi^2_{n_1}}{n_1\chi^2_{n_2}}$ valószínűségi változót $(n_1,\ n_2)$**-szabadságfokú F-eloszlású**nak nevezzük.

A χ^2-eloszlásról mondottak alapján:

Normális populációból származó n_1 és n_2 elemszámú független minták esetén, ha $S^{*2}_{n_1}$illetve $S^{*2}_{n_2}$ a korrigált tapasztalati szórásnégyzetek, akkor $\frac{\sigma_2^2 S^{*2}_{n_1}}{\sigma_1^2 S^{*2}_{n_2}}$ $(n_1-1,\ n_2-1)$-szabadságfokú F-eloszlású.

Határozzuk meg először a $\xi = \frac{\chi^2_{n_1}}{\chi^2_{n_2}}$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. A számláló sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{(x)^{n_1/2-1}e^{-x/2}}{2^{n_1/2}\Gamma(n_1/2)}$, a nevező sűrűségfüggvénye $h(x) = \frac{(x)^{n_2/2-1}e^{-x/2}}{2^{n_2/2}\Gamma(n_2/2)}$ ha $x > 0$, illetve 0 egyébként. Ismeretes a hányados sűrűségfüggvényére az $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}|y|g(xy)h(y)dy$ formula, ezt alkalmazva, $t = (x+1)y$ helyettesítéssel, $f_\xi(x) =$

$$\int_0^\infty y\frac{(xy)^{n_1/2-1}e^{-xy/2}}{2^{n_1/2}\Gamma(n_1/2)}\frac{y^{n_2/2-1}e^{-y/2}}{2^{n_2/2}\Gamma(n_2/2)}dy =$$

$$\frac{x^{n_1/2-1}\Gamma((n_1+n_2)/2)}{(x+1)^{(n_1+n_2)/2}\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)}\int_0^\infty \frac{t^{(n_1+n_2)/2-1}e^{-t/2}}{2^{(n_1+n_2)/2}\Gamma((n_1+n_2)/2)}dt =$$

$$\frac{x^{n_1/2-1}\Gamma((n_1+n_2)/2)}{(x+1)^{(n_1+n_2)/2}\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)}\int_{-\infty}^\infty f_{\chi^2_{n_1+n_2}}(t)dt =$$

$$\frac{x^{n_1/2-1}\Gamma((n_1+n_2)/2)}{(x+1)^{(n_1+n_2)/2}\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)}$$

ha $x > 0$, és 0 egyébként.

Ha $n_2 > 2$ akkor, alkalmazva hogy $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$, a várható értékre

$$E\xi = \int_0^\infty \frac{x^{(n_1+2)/2-1}\Gamma((n_1+n_2)/2)}{(x+1)^{(n_1+n_2)/2}\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)}dx =$$

$$\frac{\Gamma((n_1+2)/2)\Gamma((n_2-2)/2)}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)}\times$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{(n_1+2)/2-1}\Gamma((n_1+n_2)/2)}{(x+1)^{(n_1+n_2)/2}\Gamma((n_1+2)/2)\Gamma((n_2-2)/2)}dx =$$

$$\frac{\Gamma((n_1+2)/2)\Gamma((n_2-2)/2)}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)}\int_{-\infty}^\infty f_{\xi_{n_1+2,n_2-2}}(x)dx =$$

$$= \frac{\Gamma(n_1/2+1)\Gamma(n_2/2-1)}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)} = \frac{(n_1/2)\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2-1)}{\Gamma(n_1/2)(n_2/2-1)\Gamma(n_2/2-1)} =$$

$= \frac{n_1}{n_2-2}$. Ha $n > 4$, akkor a második momentum

$$E\xi^2 = \int_0^\infty \frac{x^{(n_1+4)/2-1}\Gamma((n_1+n_2)/2)}{(x+1)^{(n_1+n_2)/2}\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)}dx =$$

$$\frac{\Gamma((n_1+4)/2)\Gamma((n_2-4)/2)}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)}\times$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{(n_1+4)/2-1}\Gamma((n_1+n_2)/2)}{(x+1)^{(n_1+n_2)/2}\Gamma((n_1+4)/2)\Gamma((n_2-4)/2)}dx =$$

$$\frac{\Gamma((n_1+4)/2)\Gamma((n_2-4)/2)}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)} \int_{-\infty}^\infty f_{\xi_{n_1+4,n_2-4}}(x)dx =$$

$$= \frac{\Gamma(n_1/2+2)\Gamma(n_2/2-2)}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)} =$$

$$\frac{(n_1/2)(n_1/2+1)\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2-2)}{\Gamma(n_1/2)(n_2/2-2)(n_2/2-1)\Gamma(n_2/2-2)} = \frac{n_1(n_1+2)}{(n_2-4)(n_2-2)}.$$

Így a szórásnégyzetre

$$D^2\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{n_1(n_1+2)}{(n_2-4)(n_2-2)} - \frac{n_1^2}{(n_2-2)^2} =$$

$$\frac{n_1}{n_2-2}\left(\frac{n_1+2}{n_2-4} - \frac{n_1}{n_2-2}\right) = \frac{2n_1(n_1+n_2-2)}{(n_2-4)(n_2-2)^2}.$$

Mivel a konstansra $f_{a\xi}(x) = \frac{1}{a} f_\xi(\frac{x}{a})$, $Ea\xi = aE\xi$, $D^2 a\xi = a^2 D^2\xi$, a következő erdeményt igazoltuk:

Az η (n_1, n_2)-szabadságfokú F-eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_\eta(x) = (n_1/n_2)^{n_1/2} \frac{x^{n_1/2-1}\Gamma((n_1+n_2)/2)}{(n_1 x/n_2+1)^{(n_1+n_2)/2}\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)}$$

ha $x > 0$, és 0 egyébként. Továbbá, a várható értéke $E\eta = \frac{n_2}{n_2-2}$ hacsak $n_2 > 2$, a szórásnégyzete $D^2\eta = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-4)(n_2-2)^2}$ hacsak $n_2 > 4$.

Megjegyezzük, hogy az F-eloszlásnak generátorfüggvénye nem létezik.