# A béta-eloszlás

A

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

integrált béta-függvénynek nevezzük ($p > 0$, $q > 0$). Nevezetes tény, hogy $B(p,q) = B(q,p)$, $B(1,1) = 1$ $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi$, és $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. (Elsőfajú) $(p,q)$**-paraméterű béta-eloszlású** valószínűségi változónak nevezzük az olyat, melynek sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)} \text{ ha } 0 < x < 1.$$

Állítjuk:

*A $\xi$ $(p,q)$-paraméterű béta-eloszlású valószínűségi változó várható értéke $\frac{p}{p+q}$, és szórásnégyzete $\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$.*

Hiszen,

$$E\xi = \frac{1}{B(p,q)}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx = \frac{B(p+1,q)}{B(p,q)} =$$

$$\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = \frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)}\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = \frac{p}{p+q},$$

illetve a második momentum

$$E\xi^2 = \frac{1}{B(p,q)}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{B(p+2,q)}{B(p,q)} =$$

$$\frac{\Gamma(p+2)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+2)}\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = \frac{p(p+1)\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)(p+q+1)\Gamma(p+q)}\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)},$$

ahonnan $D^2\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 =$

$$\frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)} - \frac{p^2}{(p+q)^2} = \frac{p(p+1)(p+q) - p^2(p+q+1)}{(p+q)^2(p+q+1)} =$$

$\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$, amit be kellett látni.

A gamma és béta-eloszlások közötti kapcsolat a következő:

*Ha $\xi$ és $\eta$ független $p$ illetve $q$-paraméterű gamma-eloszlású valószínűségi változók, akkor $\frac{\xi}{\xi+\eta}$ $(p,q)$-paraméterű béta-eloszlású valószínűségi változó.*

*Továbbá, ha a $\xi$ $(p,q)$-paraméterű béta-eloszlású, $\eta$ $p+q$-paraméterű gamma-eloszlású valószínűségi változók függetlenek, akkor a $\xi\eta$ szorzat $p$-paraméterű gamma-eloszlású valószínűségi változó.*