Paraméteres próbák

A leíró statisztika eszközeivel képesek vagyunk elemezni egy sokaságot, de csak abban az esetben, ha az alapadatok mennyisége az ésszerűség határán belül marad. Nyilván az adatkezelésnek is megvannak a maga fizikai korlátai. Több olyan folyamat is van, amiből szinte korlátlan mennyiségű adat gyűjthető, így lehetetlen megismerni a sokaság minden egyes elemét. Más oka is lehet annak, hogy az adatgyűjtés nem lehet teljes. Például a vizsgált folyamat a jövőben is folytatódik és így az elméletileg kiterjesztett sokaság jelentős részét nem ismerhetjük meg a megfigyelés pillanatában. További ok lehet az, hogy nem állhat a rendelkezésünkre minden adat, sok időbe vagy pénzbe kerül az egyes adatok gyűjtése, stb. Az előző esetekben tehát nem ismerjük a sokaság minden egyes elemét, ezért a folyamat elemzése néhány megfigyelés alapján történik.

A matematikai statisztika tárgya

A matematikai statisztika a fent említett problémával foglalkozik. Feltételezi, hogy minden egyes megfigyelés, és így a sokaság lehetséges elemei, csak számszerű adatok lehetnek (mennyiségi ismérvről van tehát szó). Minden folyamatnak megvannak a maga szabályai, sajátosságai. Ezek befolyásolják a megfigyelések lehetséges értékeit és annak a valószínűségét, hogy egy megfigyelés adott értékek közé esik. Egy konkrét megfigyelés értéke a véletlen műve, de követi a folyamat szabályait. Ezért ezt úgy fogjuk modellezni, hogy minden folyamathoz tartozik egy ξ valószínűségi változó és minden megfigyelés ennek egy lehetséges értéke. Azonban a ξ valószínűségi változót egyáltalán nem, vagy csak néhány tulajdonságát ismerjük. Feladatunk egy hiányzó tulajdonság elemzése néhány megfigyelt érték segítségével.

Például, ha azt a folyamatot figyeljük meg, hogy egy 1 méteres vágásra beállított fűrészgép milyen hosszúságú deszkákat vág, és nagy pontossággal tudunk mérni, akkor látjuk, hogy a mért értékek nem egyformák, de 1 méter körül találhatók kis eltéréssel. Ha ξ jelöli egy megfigyelt, levágott deszka hosszát, akkor valószínűségszámítási ismereteinkből tudjuk, hogy ξ egy normális eloszlású valószínűségi változó $m = 1$ várható értékkel. ξ szórását nem ismerjük, de a folyamat létező sajátossága, amit megpróbálhatunk néhány levágott deszka hosszából kikövetkeztetni. Egy másik fűrészgép valószínű más szórásértékkel működne.

1. A statisztikai minta

Említettük, hogy elemzéseinket néhány megfigyelésből fogjuk megtenni, azok pedig egy valószínűségi változó lehetséges értékei. A megfigyelt elemek kiválasztásának módját *mintavételi eljárásnak* nevezzük. Több ilyen létezik, elég, ha arra gondolunk, hogy elemeket visszatevés nélkül vagy visszatevéssel választhatunk ki.

mintavételi eljárás

Mi azonban egy konkrét mintavételi eljárással foglalkozunk, aminek lényege az, hogy n darab egymástól független megfigyelést végezzünk. Minden megfigyelés elméletben egy, a ξ-vel azonos eloszlású valószínűségi változó, de a gyakorlatban a ξ egyik lehetséges értékével egyenlő. *Statisztikai minta* (vagy egyszerűen minta) alatt n darab

statisztikai minta

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \dots\ \xi_n$$

független, azonos eloszlású valószínűségi változó sorozatát értjük. n a *minta elemszáma.* A gyakorlatban a minta egy a fenti valószínűségi változó sorozatának lehetséges értékei, melyet általában

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots\ x_n$$

módon jelölünk.

Az elemzésekhez olyan függvények elkészítése szükséges, amelyek a mintának függvénye, és így ezek is valószínűségi változók lesznek. Az ilyen függvényeket *statisztikának* nevezzük. Ilyen például a mintaátlag:

statisztika

$$\overline{\xi} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k = \frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3+\cdots+\xi_n}{n},$$

és a korrigált tapasztalati szórás:

$$\sigma_n^* = \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k-\overline{\xi})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(\xi_1-\overline{\xi})^2+(\xi_2-\overline{\xi})^2+\cdots+(\xi_n-\overline{\xi})^2}{n-1}}$$

A gyakorlatban, konkrét minta esetén, $\overline{\xi}$ és σ_n^* értéke megegyezik az

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots\ x_n$$

adatsor $\overline{x}$ átlagával és s^* korrigált szórásával. Szeretnénk megjegyezni, hogy a konkrét mintából kapott adatsort is leíró statisztikai eszközökkel jellemezhetjük.

2. Statisztikai próbák

A matematikai statisztikai módszerek lényege az, hogy egy konkrét mintából tudjuk következtetni a vizsgált folyamatot leíró ξ valószínűségi változó nem ismert tulajdonságaira. Egy ilyen feladat lehet ξ valamely paraméterének (pl. várható értéke) becslése, de vannak ettől eltérő problémák is.

Tegyük fel például, hogy a fűrészgép beállításai időnként egy kicsit elcsúsznak, ezért időközönként ellenőrizni kell, hogy a legyártott deszkák megfelelnek az elvárt 1 méteres szabványnak. Mivel nagy mennyiségű termékről van szó, ezért egy minta alapján minőségi ellenőrzést végzünk. Itt nem a legyártott deszkák hosszát szeretném becsülni, hanem eldönteni, hogy megfelelnek-e az elvárt szabványnak, vagy sem.

statisztikai próba

Olyan problémáról van tehát szó, amikor a mintából származó információ alapján döntünk egy, a ξ-vel kapcsolatos állításról (hipotézisről). De tovább megyünk, nem csak arról van szó, hogy olyan eljárást adunk meg, ahol arról döntünk, hogy egy állítás igaz vagy annak ellenkezője lesz az, mint a hétköznapokban teszünk. Megengedhető, hogy vele szemben egy másik állítást is megfogalmazzuk, ami nem feltétlenül az állítás ellenkezője, és akkor fogadjuk el azt, amikor az eredeti állítást elvetjük. Az ilyen jellegű eljárásokat *statisztikai próbáknak* nevezzük.

nullhipotézis
ellenhipotézis

Azt az állítást, amiről eredetileg dönteni szeretnénk, *nullhipotézisnek* (jele: H_0), a vele szemben felállított állítást *ellenhipotézisnek* (jele: H_1) nevezzük.

A fenti példában arra voltunk kiváncsiak, hogy a legyártott deszkák megfelelnek-e az elvárt 1 méteres szabványnak. Ez a nullhipotézis. Ha ξ jelöli egy tetszőlegesen kiválasztott deszka hosszát, és $m := M\xi$ a várható értéke, akkor a nullhipotézis a következő módon írható:

$$\mathrm{H}_0 \colon m = 1.$$

A példa szerint a deszkák nem felelnek meg a szabványnak, ha nem mondhatjuk el, hogy a hosszúságuk 1 méter. Így az ellenhipotézis

$$\mathrm{H}_1 \colon m \neq 1.$$

Ha bizonyos okok miatt tudjuk, hogy a fűrészgép beállításai csak úgy csúszhatnak el, hogy 1 méternél valamivel nagyobb deszkákat vághatunk, akkor az előző ellenhipotézis helyett a

$$\mathrm{H}_1 \colon m > 1$$

ellenhipotézissel érdemes számolni és így élesebb eredményt kapunk. Fontos megjegyezni, hogy hipotézisvizsgálatkor a nullhipotézis elfogadása függhet attól, hogy vele szemben milyen ellenhipotézis állítunk. A megfelelő ellenhipotézis felállításához sokszor jól kell ismerni a feladat részleteit.

A statisztikai próbáknak két fő csoportja van. Ha a hipotézisek arról szólnak, hogy ξ valamely paramétere (pl. várható értéke, szórása) eleme-e adott halmazoknak, akkor *paraméteres próbákról* beszélünk. Ellenkező esetben (pl. ξ eloszlás típusával kapcsolatos) *nemparaméteres próbákról* beszélünk.

paraméteres próba

Említettük, hogy a minta

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n$$

független, ξ-vel azonos eloszlású valószínűségi változók sorozatának kell tekinteni, amíg nem végzünk konkrét megfigyeléseket. Minden statisztika (a mintán értelmezett függvény) egy újabb valószínűségi változó. A feladat jellegétől függően, azaz attól függően, hogy milyen nullhipotézist állítunk fel és a ξ-nek milyen tulajdonságait, paramétereit ismerjük, egy konkrét statisztikát kell kiválasztani, melynek eloszlása általunk ismert alakot ölt, amennyiben a nullhipotézis igaz. Így minden egyes konkrét, már számokból álló

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$$

minta esetén a statisztika képletével olyan számot kapunk, melynek követnie kell egy eloszlás „szabályszerűségét”, ha a nullhipotézis igaz. Így kijelölhetünk olyan valós halmazt, az ú.n. *elfogadási tartomány*, hogy ha a kiszámolt érték ebbe bele esik, akkor H_0 mellett, ha nem esik bele, akkor H_1 mellett döntünk. Az elfogadási tartomány komplementerét *kritikus tartománynak* nevezzük, így ha a kiszámolt érték ebbe esik bele, akkor H_1 mellett döntünk.

elfogadási és kritikus tartomány

A fenti példánál igazolható, hogy ha ξ szórását ismerjük és ez fél milliméter $(0,0005$ méter), továbbá a gyártás során feltételezhető, hogy ξ egy normális eloszlású valószínűségi változó, akkor a

$$z = \frac{\overline{\xi} - 1}{0,0005} \cdot \sqrt{n}$$

egy standard normális eloszlású valószínűségi változó, amennyiben igaz, hogy ξ várható értéke valóban 1. Más próbák esetén, más statisztikákkal dolgozunk majd.

Fontos leszögezni, hogy csupán csak döntünk a hipotézisek igazságáról és nem igazoljuk azokat. Dönteni pedig lehet rosszul is, hiszen lehet, hogy véletlenül olyan mintát veszünk, ami nem jellemzi a sokaságot. Két féle módon lehet hibázni:

első- és másodfajú hibák

elsőfajú hiba Elvetjük a H_0 hipotézist és így elfogadjuk a H_1 hipotézist, pedig H_0 igaz volt.

másodfajá hiba Elfogadjuk a H_0 hipotézist és így elvetjük a H_1 hipotézist, pedig H_0 hamis volt.

szignifikancia szint

Ha hibázhatunk, akkor szeretnénk ezt minél kisebb mértékben tenni. Sajnos egyetlen próbával nem lehet mind a két fajta hibát minimalizálni, ezért csak az egyiket fogjuk egy bizonyos szint alatt tartani. Ezt az α számot *szignifikancia szintnek* nevezzük, azaz

$$P(\mathrm{H}_1\text{-t elfogadjuk} \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ igaz}) = \alpha$$

Ez azt jelenti, hogy az elfogadási és kritikus tartományt a szignifikancia szint betartásával kell meghatározni, és így az elsőfajú hiba egy meghatározott kis valószínűség alatt lesz.

Tegyük fel, hogy a példánknál a

$$\mathrm{H}_0\colon m = 1, \qquad \mathrm{H}_1\colon m \neq 1$$

null- és ellenhipotézisről döntünk. Ha feltételezzük, hogy H_0 igaz, akkor z standard normális eloszlású valószínűségi változó ($\mathcal{N}(0,1)$). Ebben az esetben z lehetséges értékei nagy valószínűséggel a 0 érték közelében lesznek. Ha egy mintából olyan z értéket kapunk, ami távol van a 0 értéktől, akár pozitív akár negatív értékről van is szó, akkor nagy valószínűséggel H_1 lesz igaz. Az elfogadási tartományt tehát a $[-c_\alpha, c_\alpha]$ alakban fogjuk keresni, azaz ha $|z| \leq c_\alpha$ elfogadjuk a nullhipotézist. Ellenkező esetben, ha $|z| > c_\alpha$, akkor nem, és elfogadjuk az ellenhipotézist. A szignifikancia szint alkalmazásával

$$\begin{aligned}
P(\mathrm{H}_1\text{-t elfogadjuk} \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ igaz}) &= \alpha \\
P(|z| > c_\alpha \,|\, z \sim \mathcal{N}(0,1)) &= \alpha \\
P(-c_\alpha < z < c_\alpha \,|\, z \sim \mathcal{N}(0,1)) &= 1-\alpha \\
\Phi(c_\alpha) - \Phi(-c_\alpha) &= 1-\alpha \\
2\Phi(c_\alpha) - 1 &= 1-\alpha \\
\Phi(c_\alpha) &= 1-\frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye és alkalmaztuk a

$$\Phi(-c_\alpha) = 1 - \Phi(c_\alpha)$$

összefüggést. A c_α érték kiszámítása az Excel-ben elvégezhető az `INVERZ.STNORM` függvénnyel. Ha 95% biztonságban szeretnénk a próbát elvégezni, akkor a szignifikancia szint 5%, ami megfelel az $\alpha = 0,05$. Ha az egyik cellát `alpha`-val nevezünk el és értéke 0,05, akkor

$c_\alpha =$ `INVERZ.STNORM(1-alpha/2)` $= 1,96$

Ez azt jelenti, hogy abban az esetben, ha egy konkrét mintából származó z érték esetén $|z| < 1,96$, akkor H_0-át fogadjuk el és H_1-et vetjük el, azaz a gyártás megfelel a szabványnak. Ellenkező esetben nem felel meg a szabványnak.

Említettünk olyan esetet, amikor az előző példánál a

$$\mathrm{H}_0\colon m = 1, \qquad \mathrm{H}_1\colon m > 1$$

null- és ellenhipotézisről döntünk. Ebben az esetben z is standard normális eloszlású valószínűségi változó, ha H_0 igaz. Az a különbség, hogy H_1 csak akkor lehet igaz, ha $z > 0$, különben z képlete szerint a minta átlaga (ami az m várható érték torzítatlan becslése) kisebb, mint 1. Ezért a negatív számok az elfogadási tartománynak része, amit $]-\infty, c_\alpha]$ alakban fogjuk most keresni. Ez azt jelenti, hogy pontosan akkor fogadjuk el a nullhipotézist, ha $z \le c_\alpha$. A szignifikancia szint alkalmazásával

$$\begin{aligned} P(\mathrm{H}_1\text{-t elfogadjuk} \mid \mathrm{H}_0 \text{ igaz}) &= \alpha \\ P(z > c_\alpha \mid z \sim \mathcal{N}(0,1)) &= \alpha \\ 1 - P(z < c_\alpha \mid z \sim \mathcal{N}(0,1)) &= \alpha \\ 1 - \Phi(c_\alpha) &= \alpha \\ \Phi(c_\alpha) &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

A c_α érték kiszámítása az Excel-ben most 95% biztonságban:

$c_\alpha =$ `INVERZ.STNORM(1-alpha)` $= 1,64$

Ez azt jelenti, hogy abban az esetben, ha egy konkrét mintából származó z érték esetén $z < 1,64$, akkor H_0-át fogadjuk el és H_1-et vetjük el.

3. Nevezetes paraméteres próbák

Tekintsük át a statisztikai próbák végrehajtásának általános gondolatmenetét: a próbák menete

1. Állapítsuk meg, hogy milyen tulajdonságokat ismerhetünk meg a sokasághoz kapcsolódó ξ valószínűségi változóról (eloszlásfajta, paraméterek, stb.)!
2. Fogalmazzuk meg a H_0 és H_1 hipotéziseket!
3. Keressük meg a fenti feltételeknek megfelelő statisztikát!
4. Válasszuk meg az α szignifikancia szintet és az ellenhipotézissel összhangban számítsuk ki az elfogadási tartományt!
5. Hajtsuk végre a mintavételt és számítsuk ki vele a statisztika értékét!
6. A kiszámolt statisztika értéke és az elfogadási tartomány alapján döntsünk arról, hogy melyik hipotézist fogadjuk el a másik elutasításával szemben!

Ismét elmondjuk, hogy ha a kiszámolt statisztika értéke eleme az elfogadási tartománynak, akkor H_0-át elfogadjuk és H_1-et utasítjuk el. Ha az értéke nem eleme az elfogadási tartománynak, akkor H_1-et elfogadjuk és H_0-át utasítjuk el.

Tipikus döntési probléma két folyamat összehasonlítása. Ekkor két sokasággal van dolgunk, melyekből egy-egy kétmintás próbák

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots \xi_{n_1} \qquad \text{és} \qquad \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots \eta_{n_2}$$

mintát veszünk. Az ú.n. két kétmintás próbák célja a két sokaság egy-egy paraméter értékének egymáshoz való viszonyára vonatkozik. A próba menete a fentihez hasonló azzal a különbséggel, hogy két sokaság van és a statisztika kiszámított értékét két konkrét

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_{n_1} \qquad \text{és} \qquad y_1, y_2, y_3, \dots y_{n_2}$$

mintából számoljuk ki.

A következőkben megadjuk a legnevezetesebb paraméteres próbák menetét. Szeretnénk megjegyezni, hogy a próbák zöme normális eloszlású valószínűségi változókra vonatkozik, de ha kellően nagy mintát veszünk, akkor a z- és t-próbákhoz nem szükséges a normalitás.

3.1. Egymintás z-próba

Akkor alkalmazzuk, ha tudjuk, hogy ξ egy normális eloszlású valószínűségi változó ismert σ szórással, és azt vizsgáljuk, hogy ξ valószínűségi változó nem ismert m várható értéke megegyezik-e egy konkrét m_0 értékkel:

$$\mathrm{H}_0 \colon m = m_0.$$

Ezzel szemben háromféle ellenhipotézis tudunk felállítani.

$$\mathrm{H}_1 \colon m < m_0, \quad \text{vagy} \quad \mathrm{H}_1 \colon m \neq m_0, \quad \text{vagy} \quad \mathrm{H}_1 \colon m > m_0.$$

A statisztika

$$z = \frac{\overline{\xi} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$$

egy standard normális eloszlású valószínűségi változó, ha a H_0 hipotézis fennáll. Jelölje z_p azt az értéket, ahol z eloszlásfüggvénye pontosan a p valószínűségi értékkel egyenlő. Ezt az Excel programban a következő módon határozhatjuk meg:

$z_p =$ `INVERZ.STNORM(p)`

α szignifikancia szinttel a három lehetséges ellenhipotézis mellet megadhatjuk az elfogadási tartományt:

H_1	Elfogadási tartomány
$m < m_0$	$[z_\alpha, \infty[$
$m \neq m_0$	$\left[z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right[$
$m > m_0$	$]-\infty, z_{1-\alpha}]$

1. táblázat. Elfogadási tartományok egymintás z-próba esetén

Igazolható, hogy $z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Ezek után egy konkrét

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n$$

minta alapján kiszámítjuk a

$$z = \frac{\overline{x} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$$

értéket és a megnézzük, hogy bele esik-e az elfogadási tartományba, vagy sem. Ha igen, akkor H_0-át elfogadjuk és H_1-et utasítjuk el. Ha nem, akkor H_1-et elfogadjuk és H_0-át utasítjuk el.

3.2. Egymintás t-próba

A feladat az előzőhöz hasonló. Itt is tudjuk, hogy ξ egy normális eloszlású valószínűségi változó, de *nem ismerjük a szórását.* Hasonlóan azt vizsgáljuk, hogy ξ valószínűségi változó nem ismert m várható értéke megegyezik-e egy konkrét m_0 értékkel:

$$\mathrm{H}_0 \colon m = m_0.$$

Ezzel szemben is ugyanazt a háromféle ellenhipotézist fogjuk felállítani.

$$\mathrm{H}_1 \colon m < m_0, \quad \text{vagy} \quad \mathrm{H}_1 \colon m \neq m_0, \quad \text{vagy} \quad \mathrm{H}_1 \colon m > m_0.$$

A statisztika

$$t = \frac{\overline{\xi} - m_0}{s^*} \cdot \sqrt{n}$$

egy student eloszlású (vagy t-eloszlású) valószínűségi változó $n-1$ szabadsági fokkal, ha a H_0 hipotézis fennáll. Jelölje t_p azt az értéket, ahol t eloszlásfüggvénye pontosan a p valószínűségi értékkel egyenlő. Ezt az Excel programban a következő módon határozhatjuk meg:

$t_p =$ `-INVERZ.T(2*p;n-1)`, ha $p \leq 0,5$

$t_p =$ `INVERZ.T(2*(1-p);n-1)`, ha $p > 0,5$

Ez ezért van, mert az Excel-ben az `INVERZ.T` függvénnyel kétszélű t-értéket kapunk eredményül.

α szignifikancia szinttel a három lehetséges ellenhipotézis mellet megadhatjuk az elfogadási tartományt:

H_1	Elfogadási tartomány
$m < m_0$	$[t_\alpha, \infty[$
$m \neq m_0$	$\left[t_{\frac{\alpha}{2}}, t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right[$
$m > m_0$	$]-\infty, t_{1-\alpha}]$

2. táblázat. Elfogadási tartományok egymintás t-próba esetén

Igazolható, hogy $t_{\frac{\alpha}{2}} = -t_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Ezek után egy konkrét

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n$$

minta alapján kiszámítjuk a

$$t = \frac{\overline{x} - m_0}{\sigma_n^*} \cdot \sqrt{n}$$

értéket és a megnézzük, hogy bele esik-e az elfogadási tartományba, vagy sem. Ha igen, akkor H_0-át elfogadjuk és H_1-et utasítjuk el. Ha nem, akkor H_1-et elfogadjuk és H_0-át utasítjuk el.

3.3. χ^2-próba szórásra

Ez egy sokaság szórásának ellenőrzésére vonatkozó próba. Akkor alkalmazzuk, ha tudjuk, hogy ξ egy normális eloszlású valószínűségi változó, de semmi mást nem ismerünk. Azt vizsgáljuk, hogy ξ valószínűségi változó nem ismert σ szórása megegyezik-e egy konkrét σ_0 értékkel:

$$\mathrm{H}_0\colon \sigma = \sigma_0.$$

Ezzel szemben háromféle ellenhipotézis tudunk felállítani.

$$\mathrm{H}_1\colon \sigma < \sigma_0, \quad \text{vagy} \quad \mathrm{H}_1\colon \sigma \neq \sigma_0, \quad \text{vagy} \quad \mathrm{H}_1\colon \sigma > \sigma_0.$$

A statisztika

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^{*2}}{\sigma_0^2}$$

egy χ^2-eloszlású valószínűségi változó $n-1$ szabadsági fokkal, ha a H_0 hipotézis fennáll. Jelölje χ^2_p azt az értéket, ahol χ^2 eloszlásfüggvénye pontosan a p valószínűségi értékkel egyenlő. Ezt az Excel programban a következő módon határozhatjuk meg:

$\chi^2_p =$ `INVERZ.KHI(1-p;n-1)`

α szignifikancia szinttel a három lehetséges ellenhipotézis mellet megadhatjuk az elfogadási tartományt:

H_1	Elfogadási tartomány
$\sigma < \sigma_0$	$[\chi^2_\alpha, \infty[$
$\sigma \neq \sigma_0$	$\left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}, \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right[$
$\sigma > \sigma_0$	$[0, \chi^2_{1-\alpha}]$

3. táblázat. Elfogadási tartományok χ^2-próba szórásra

Ezek után egy konkrét

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n$$

minta alapján kiszámítjuk a

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\sigma_n^{*2}}{\sigma_0^2}$$

értéket és a megnézzük, hogy bele esik-e az elfogadási tartományba, vagy sem. Ha igen, akkor H_0-át elfogadjuk és H_1-et utasítjuk el. Ha nem, akkor H_1-et elfogadjuk és H_0-át utasítjuk el.

3.4. A sokasági arányszámmal kapcsolatos próba

Legyen A az az esemény, hogy a sokaságból véletlenszerűen kiválasztott elem rendelkezik-e egy bizonyos tulajdonsággal, például egy adott intervallumnak eleme-e. Azt vizsgáljuk, hogy az A esemény nem ismert p bekövetkezésének valószínűsége megegyezik-e egy konkrét p_0 értékkel:

$$\mathrm{H}_0 : p = p_0.$$

Ezzel szemben háromféle ellenhipotézis tudunk felállítani.

$$\mathrm{H}_1 : p < p_0, \quad \text{vagy} \quad \mathrm{H}_1 : p \neq p_0, \quad \text{vagy} \quad \mathrm{H}_1 : p > p_0.$$

Ebben az esetben, ha megfigyeléseket végzünk, akkor nem maga a kapott érték lesz fontos, hanem az, hogy az egyes értékek rendelkeznek-e a tulajdonsággal, azaz bekövetkezett-e az A esemény. Ezért a minta egyes értékét 1-nek vagy 0-nak fogjuk tekinteni aszerint, hogy az egyes megfigyelések rendelkeznek a tulajdonsággal vagy sem.

$$\xi_k = \begin{cases} 1 & \text{a } k\text{-adik megfigyelés rendelkezik az adott tulajdonsággal} \\ 0 & \text{a } k\text{-adik megfigyelés nem rendelkezik az adott tulajdonsággal} \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy a minta elemszáma elég nagy. A statisztika

$$z = \frac{\overline{\xi} - p_0}{p_0(1-p_0)} \cdot \sqrt{n}$$

egy standard normális eloszlású valószínűségi változó, ha a H_0 hipotézis fennáll. Ezek után a próba ugyanúgy működik mint az egymintás z-próba. Jelölje z_p azt az értéket, ahol z eloszlásfüggvénye pontosan a p valószínűségi értékkel egyenlő. Ezt az Excel programban a következő módon határozhatjuk meg:

$z_p =$ `INVERZ.STNORM(p)`

α szignifikancia szinttel a három lehetséges ellenhipotézis mellet megadhatjuk az elfogadási tartományt:

H_1	Elfogadási tartomány
$p < p_0$	$[z_\alpha, \infty[$
$p \neq p_0$	$\left[z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right[$
$p > p_0$	$]-\infty, z_{1-\alpha}]$

4. táblázat. Elfogadási tartományok a sokasági arányszámmal kapcsolatos próbára

Ezek után egy konkrét

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n$$

minta alapján kiszámítjuk a

$$z = \frac{\overline{x} - p_0}{p_0(1 - p_0)} \cdot \sqrt{n}$$

értéket és megnézzük, hogy bele esik-e az elfogadási tartományba, vagy sem. Ha igen, akkor H_0-át elfogadjuk és H_1-et utasítjuk el. Ha nem, akkor H_1-et elfogadjuk és H_0-át utasítjuk el.

3.5. Kétmintás z-próba

Akkor alkalmazzuk, ha tudjuk, hogy ξ és η két normális eloszlású valószínűségi változó ismert σ_1 és σ_2 szórással, és azt vizsgáljuk, hogy ξ és η valószínűségi változók nem ismert m_1 és m_2 várható értékének különbsége megegyezik-e egy konkrét m_0 értékkel:

$$H_0\colon m_1 - m_2 = m_0.$$

Ezzel szemben háromféle ellenhipotézis tudunk felállítani.

$$H_1\colon m_1 - m_2 < m_0, \quad \text{vagy} \quad H_1\colon m_1 - m_2 \neq m_0, \quad \text{vagy} \quad H_1\colon m_1 - m_2 > m_0.$$

A statisztika

$$z = \frac{\overline{\xi} - \overline{\eta} - m_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

egy standard normális eloszlású valószínűségi változó, ha a H_0 hipotézis fennáll. Ezek után a próba ugyanúgy működik mint az egymintás z-próba. Jelölje z_p azt az értéket, ahol z eloszlásfüggvénye pontosan a p valószínűségi értékkel egyenlő. Ezt az Excel programban a következő módon határozhatjuk meg:

$z_p =$ `INVERZ.STNORM(p)`

α szignifikancia szinttel a három lehetséges ellenhipotézis mellet megadhatjuk az elfogadási tartományt:

5. táblázat. Elfogadási tartományok kétmintás z-próba esetén

H_1	Elfogadási tartomány
$m_1 - m_2 < m_0$	$[z_\alpha, \infty[$
$m_1 - m_2 \neq m_0$	$\left[z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right[$
$m_1 - m_2 > m_0$	$]-\infty, z_{1-\alpha}]$

Ezek után egy konkrét

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_{n_1} \qquad \text{és} \qquad y_1, y_2, y_3, \dots y_{n_2}$$

két minta alapján kiszámítjuk a

$$z = \frac{\overline{x} - \overline{y} - m_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

értéket és megnézzük, hogy bele esik-e az elfogadási tartományba, vagy sem. Ha igen, akkor H_0-át elfogadjuk és H_1-et utasítjuk el. Ha nem, akkor H_1-et elfogadjuk és H_0-át utasítjuk el.

3.6. F-próba

Akkor alkalmazzuk, ha tudjuk, hogy ξ és η két normális eloszlású valószínűségi változóról szeretnénk dönteni, hogy a szórásuk megegyeznek-e, pontosabban azt vizsgáljuk, hogy ξ és η valószínűségi változók nem ismert σ_1 és σ_2 várható értékének különbsége megegyezik-e egy konkrét σ_0 értékkel:

$$H_0 : \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_0.$$

Ezzel szemben háromféle ellenhipotézis tudunk felállítani.

$$H_1 : \sigma_1 - \sigma_2 < \sigma_0, \quad \text{vagy} \quad H_1 : \sigma_1 - \sigma_2 \neq \sigma_0, \quad \text{vagy} \quad H_1 : \sigma_1 - \sigma_2 > \sigma_0.$$

A statisztika

$$F = \frac{s_1^{*2}}{s_2^{*2}}$$

egy F-eloszlású valószínűségi változó sorrendben $n_1 - 1$ és $n_2 - 1$ szabadságfokkal, ha a H_0 hipotézis fennáll. Jelölje F_p azt az értéket, ahol F eloszlásfüggvénye pontosan a p valószínűségi értékkel egyenlő. Ezt az Excel programban a következő módon határozhatjuk meg:

$F_p =$ `INVERZ.F(1-p;n_1-1;n_2-1)`

α szignifikancia szinttel a három lehetséges ellenhipotézis mellet megadhatjuk az elfogadási tartományt:

H_1	Elfogadási tartomány
$\sigma_1 - \sigma_2 < \sigma_0$	$[F_\alpha, \infty[$
$\sigma_1 - \sigma_2 \neq \sigma_0$	$\left[F_{\frac{\alpha}{2}}, F_{1-\frac{\alpha}{2}}\right[$
$\sigma_1 - \sigma_2 > \sigma_0$	$]-\infty, F_{1-\alpha}]$

6. táblázat. Elfogadási tartományok F-próba esetén

Ezek után egy konkrét

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n_1} \qquad \text{és} \qquad y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n_2}$$

két minta alapján kiszámítjuk a

$$F = \frac{{\sigma^*_{n_1}}^2}{{\sigma^*_{n_2}}^2}$$

értéket és megnézzük, hogy bele esik-e az elfogadási tartományba, vagy sem. Ha igen, akkor H_0-át elfogadjuk és H_1-et utasítjuk el. Ha nem, akkor H_1-et elfogadjuk és H_0-át utasítjuk el.

Szeretnénk megjegyezni, hogy szórás egyezésre vonatkozó F-próba esetén $\sigma_0 = 0$ és a kétoldali (második) ellenhipotézist kell szembe állítani a nullhipotézissel.

3.7. Kétmintás t-próba

Itt is tudjuk, hogy ξ és η két normális eloszlású valószínűségi változó, de

- ★ nem ismerjük a szórásukat,
- ★ feltételezhető (pl. F-próbával), hogy a két szórás azonos.

Azt vizsgáljuk, hogy ξ és η valószínűségi változók nem ismert m_1 és m_2 várható értékének különbsége megegyezik-e egy konkrét m_0 értékkel:

$$\mathrm{H}_0\colon m_1 - m_2 = m_0.$$

Ezzel szemben háromféle ellenhipotézis tudunk felállítani.

$\mathrm{H}_1\colon m_1 - m_2 < m_0$, vagy $\mathrm{H}_1\colon m_1 - m_2 \neq m_0$, vagy $\mathrm{H}_1\colon m_1 - m_2 > m_0$.

A statisztika

$$t = \frac{\overline{\xi} - \overline{\eta} - m_0}{s_d \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \qquad \text{ahol} \quad s_d = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^{*2} + (n_2 - 1)s_2^{*2}}{n_1 + n_2 - 2}}$$

egy t-eloszlású valószínűségi változó $n_1 + n_2 - 2$ szabadságfokkal, ha a H_0 hipotézis fennáll. Jelölje t_p azt az értéket, ahol t eloszlásfüggvénye pontosan a p valószínűségi értékkel egyenlő. Ezt az Excel programban a következő módon határozhatjuk meg:

$t_p =$ `-INVERZ.T(2*p;n_1+n_2-2)`, ha $p \leq 0,5$

$t_p =$ `INVERZ.T(2*(1-p);n_1+n_2-2)`, ha $p > 0,5$

α szignifikancia szinttel a három lehetséges ellenhipotézis mellet megadhatjuk az elfogadási tartományt:

H_1	Elfogadási tartomány
$m_1 - m_2 < m_0$	$[t_\alpha, \infty[$
$m_1 - m_2 \neq m_0$	$\left[t_{\frac{\alpha}{2}}, t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right[$
$m_1 - m_2 > m_0$	$]-\infty, t_{1-\alpha}]$

7. táblázat. Elfogadási tartományok kétmintás t-próba esetén

Ezek után egy konkrét

$$x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\, x_{n_1} \qquad \text{és} \qquad y_1,\, y_2,\, y_3,\, \ldots\, y_{n_2}$$

két minta alapján kiszámítjuk a

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y} - m_0}{\sigma_d \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \qquad \text{ahol} \quad \sigma_d = \sqrt{\frac{(n_1 - 1){\sigma_{n_1}^*}^2 + (n_2 - 1){\sigma_{n_2}^*}^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

értéket és megnézzük, hogy bele esik-e az elfogadási tartományba, vagy sem. Ha igen, akkor H_0-át elfogadjuk és H_1-et utasítjuk el. Ha nem, akkor H_1-et elfogadjuk és H_0-át utasítjuk el.

3.8. Welch-próba

Ha azért nem tudunk t-próbát alkalmazni, mert nem tudjuk biztosan, hogy a szórások megegyeznek-e, akkor Welch-próbát alkalmazunk. A próba menete megegyezik a t-próbával, azonban más lesz a statisztika. Ezt a következőképpen adjuk meg:

$$t = \frac{\overline{\xi} - \overline{\eta} - m_0}{\sqrt{\frac{{s_1^*}^2}{n_1} + \frac{{s_1^*}^2}{n_2}}}$$

egy közelítőleg t-eloszlású valószínűségi változó f szabadságfokkal, ha a H_0 hipotézis fennáll. Az f értéke

$$\frac{1}{f} = \frac{c^2}{n_2 - 1} + \frac{(1-c)^2}{n_1 - 1}, \qquad \text{ahol} \quad c = \frac{\frac{{\sigma_{n_2}^*}^2}{n_2}}{\frac{{\sigma_{n_1}^*}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_{n_2}^*}^2}{n_2}}.$$

Ha az f érték nem egész, akkor interpolálni kell.