Paraméteres pontbecslés

A statisztikai következtetések egyik fontos fajtája a **pontbecslés**. Tegyük fel, hogy a populációt, amit vizsgálunk, egy θ paramétertől eltekintve ismert $f_\xi(x,\theta)$ sűrűségfüggvény jellemzi. A megfigyelt $\xi_1,\ldots,\xi_n$ mintából a $t(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ statisztikai függvény értékével becsüljük az ismeretlen θ paramétert illetve annak $g(\theta)$ függvényét. A $t(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ statisztikai függvényt **pontbecslésfüggvény**nek nevezzük (ez a függvény maga is valószínűségi változó). A legfontosabb módszer a pontbecslésre a maximum likelihood módszer.

Az $f(x,\theta)$ sűrűségfüggvényű populációból származó $\xi_1,\ldots,\xi_n$ minta **likelihood függvénye** a valószínűségi változók

$$L(x_1,\ldots,x_n,\theta) = f_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n,\theta) = f_{\xi_1}(x_1,\theta)\cdots f_{\xi_n}(x_n,\theta)$$

közös sűrűségfüggvénye. Azt kívánjuk meghatározni, hogy mely $\hat\theta \in \Theta$ érték esetén a legvalószínűbbek a megfigyelt $\xi_1 = x_1,\ldots,\xi_n = x_n$ mintaértékek. Vagyis azt a $\hat\theta \in \Theta$ értéket kívánjuk meghatározni, hogy melyre a $L(x_1,\ldots,x_n,\theta)$ likelihood függvénynek maximuma van. Ezt a $\hat\theta(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ függvényt, melyre a $L(x_1,\ldots,x_n,\theta)$ likelihood függvénynek maximuma van, **maximum likelihood becslésfüggvény**nek nevezzük (ez a függvény, ha létezik, maga is valószínűségi változó). A $\hat\theta(x_1,\ldots,x_n)$ értéket **a θ paraméter maximum likelihood becslésének** nevezzük **az** $x_1,\ldots,x_n$ **mintaértékek esetén**.

Mint ismeretes, $\hat\theta$ a $\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0$ egyenlet megoldása. A logaritmus függvény monotonitása miatt alkalmasabb lehet a

$$\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta) = f_{\xi_1}(x_1,\theta) + \cdots + f_{\xi_n}(x_n,\theta)$$

függvénnyel számolni. Ha $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_k)$ vektor, és bizonyos regularitási feltételek teljesülnek, akkor a maximum a

$$\frac{\partial L(\theta_1,\ldots,\theta_k)}{\partial\theta_1} = 0,\ldots,\frac{\partial L(\theta_1,\ldots,\theta_k)}{\partial\theta_k} = 0$$

egyenletrendszer megoldása.

A maximum likelihood módszernek több jó tulajdonsága van, egyik az invariancia:

Egydimenziós θ paraméter esetén ha $\hat\theta(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ a θ paraméter maximum likelihood becslésfüggvénye és g invertálható függvény, akkor $g(\theta)$ érték maximum likelihood becslésfüggvénye $g(\hat\theta)$.