A Student-eloszlás

Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, χ n-szabadságfokú χ-eloszlású valószínűségi változó, függetlenek. A $\tau = \frac{\sqrt{n}\xi}{\chi}$ valószínűségi változót **n-szabadságfokú Student-eloszlású**nak nevezzük (alias W.S. Gosset után).

Mint ismeretes, (m, σ)-paraméterű normális populációból származó n elemszámú ξ_i minta esetén $\frac{\bar{\xi}-m}{\sigma/\sqrt{n}}$ standard normális, $\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2}$ χ^2-eloszlású valószínűségi változó, ezek függetlenek, ezért

$$\frac{\frac{\sqrt{n-1}(\bar{\xi}-m)}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2}}} = \sqrt{n}\frac{\bar{\xi}-m}{S_n^*}$$

Student-eloszlású, azaz kaptuk:

Normális populációból származó n elemszámú minta esetén, ha S_n^{*2} a korrigált tapasztalati szórásnégyzet, akkor $\sqrt{n}\frac{\bar{\xi}-m}{S_n^*}$ $(n-1)$-szabadságfokú Student eloszlású.

Tekintsük az $\eta = \frac{\xi}{\chi}$ valószínűségi változót. A számláló sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, a nevező sűrűségfüggvénye $h(x) = \frac{2x^{n-1}e^{-x^2/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}$ ha $x > 0$, illetve 0 egyébként. Ismeretes a hányados sűrűségfüggvényére az $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |y|g(xy)h(y)dy$ formula, ezt alkalmazva, $t = (1+x^2)^{1/2}y$ helyettesítéssel,

$$f_\eta(x) = \int_0^\infty y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2y^2/2}\frac{2y^{n-1}e^{-y^2/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}dy =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+x^2)^{n/2}}\int_0^\infty \frac{2((1+x^2)^{1/2}y)^n}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}e^{-((1+x^2)^{1/2}y)^2/2}dy$$

$$= \frac{\sqrt{2}\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{2\pi}\Gamma(n/2)(1+x^2)^{(n+1)/2}}\int_0^\infty \frac{2t^n}{2^{(n+1)/2}\Gamma((n+1)/2)}e^{-t^2/2}dt =$$

$$\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)(1+x^2)^{(n+1)/2}}\int_0^\infty f_\chi(t)dt = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)(1+x^2)^{(n+1)/2}}.$$

Az n-szabadságfokú Student-eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_\tau(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}\frac{1}{(1+(x/\sqrt{n})^2)^{(n+1)/2}}.$$

Az $n = 1$ esetben a Student-eloszlást **Cauchy-eloszlás**nak nevezzük, sűrűségfüggvénye $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Látjuk, hogy a Cauchy-eloszlásnak várható értéke és szórásnégyzete nem létezik. Ha a szabadságfokra $n > 1$, akkor, mivel a sűrűségfüggvény páros, $E\tau = 0$, és a második momentum és a szórásnégyzet egybeesik. Parciális integrálással, felhasználva, hogy

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(1+x^2)^{(n-1)/2}} = \frac{-(n-1)x}{(1+x^2)^{(n+1)/2}}$$

kapjuk:

$$E\eta^2 = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^{(n+1)/2}}dx =$$

$$-\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)(n-1)}\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{-(n-1)x}{(1+x^2)^{(n+1)/2}}dx =$$

$$-\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)(n-1)}\left(\left[\frac{x}{(1+x^2)^{(n-1)/2}}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^{(n-1)/2}}dx\right).$$

Nyilván az improprius integrál $n = 2$-re végtelen, $n > 2$-re az integrandus az $n-2$-szabadságfokra $\frac{\xi}{\chi}$ sűrűségfüggvényétől konstansban különbözik. Az

$$\left[\frac{x}{(1+x^2)^{(n-1)/2}}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

érték $n > 2$-re zérus, ezért, mivel $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$,

$$E\eta^2 = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)(n-1)}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma((n-2)/2)}{\Gamma((n-1)/2)} =$$

$$\frac{((n-1)/2)\Gamma((n-1)/2)\Gamma((n-2)/2)}{((n-2)/2)\Gamma((n-2)/2)(n-1)\Gamma((n-1)/2)} = \frac{1}{n-2}.$$

Állításunk ennélfogva:

Az n-szabadságfokú Student-eloszlás várható értéke $n = 1$ esetén nem létezik, $n > 1$ esetén zérus; szórásnégyzete $n = 1, 2$ esetén nem létezik, $n > 2$ esetén $\frac{n}{n-2}$.

Megjegyezzük, hogy a Student-eloszlásnak generátorfüggvénye nem létezik.